Prénom :

Nom :

N° d'immatriculation :

MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES I – EXAMEN CORRIGÉ

23 janvier 2014 – 120 minutes

Consignes pour l'examen :

- Pas de calculatrice.
- Ne pas dégrafer svp.
- Justifiez vos réponses!
- Marquez clairement vos réponses.
- Documents autorisés : formulaire manuscrit.
- Les réponses sur les feuilles de brouillon ne sont pas notées!

Total : /60

Exercice 1 (Optimisation – 10 points)

/10

On veut former une boîte, sans couvercle, à partir d'une feuille rectangulaire de 6×4 mètres en découpant des carrés égaux aux quatre coins de la feuille et en relevant les bords. Appelons x le côté d'un des carrés que l'on enlève de la feuille.

- 1) Donner une formule qui exprime le volume de la boîte en fonction de x (où x est le côté d'un des carrés que l'on enlève de la feuille). (2 points)
- 2) Pour quel(s) x le volume de la boîte est-il maximal? (4 points)
- 3) Donner la valeur du volume maximal. (2 points)
- 4) Pour la valeur maximale du volume, trouver la surface de la boîte. (2 points)

Solution :

- 1) Le volume de la boîte est donné par la formule $V(x) = x(6 - 2x)(4 - 2x) = 24x - 20x^2 + 4x^3$. (2 points pour la formule)
- 2) On dérive V et on trouve $V'(x) = 12x^2 - 40x + 24 = 4(3x^2 - 10x + 6)$. (1 point)
On cherche donc les $x \in \mathbb{R}$ tels que $V'(x) = 0$. En résolvant cette équation du deuxième degré on trouve $x = \frac{5 \pm \sqrt{7}}{3}$. (1 point)
Pour savoir lequel de ces deux points est un maximum on fait le test de la dérivée seconde. On calcule $V''(x) = 24x - 40$ et on remplace par $x = \frac{5 - \sqrt{7}}{3}$ ce qui donne $V''(\frac{5 - \sqrt{7}}{3}) = -8\sqrt{7} < 0$. Ce point est donc un maximum. Pour l'autre point critique on a $V''(\frac{5 + \sqrt{7}}{3}) > 0$. Ainsi le maximum de cette fonction est atteint en $x = \frac{5 - \sqrt{7}}{3}$. (1 point pour la dérivée seconde, 1 point pour la conclusion)
- 3) On remplace $x = \frac{5 - \sqrt{7}}{3}$ dans $V(x)$ et on trouve $V = 24 \left(\frac{5 - \sqrt{7}}{3} \right) - 20 \left(\frac{32 - 10\sqrt{7}}{9} \right) + 4 \left(\frac{230 - 82\sqrt{7}}{27} \right)$. (Ici on sera généreux et donnera 1 point pour l'écriture de V et 1 point pour le calcul de x^2 et x^3).
- 4) La surface de la boîte est donnée par

$$S(x) = 2x(4 - 2x) + 2x(6 - 2x) + (4 - 2x)(6 - 2x) = 24 - 4x^2 = 4(6 - x^2).$$

On remplace par $x = \frac{5 - \sqrt{7}}{3}$ et on trouve $4(6 - \frac{32 - 10\sqrt{7}}{9}) = 4(\frac{22 + 10\sqrt{7}}{9})$.

(1 point pour la formule de l'aire et 1 point pour le calcul)

Exercice 2 (Questions à choix multiple – 10 points)

/10

Marquez d'une seule croix la réponse correcte. Chaque réponse correcte vaut 2 points. Chaque réponse fautive vaut 0 point. Pas de justification requises pour les réponses de cet exercice.

1) La probabilité d'obtenir un évènement A vaut $\frac{1}{5}$ et celle d'obtenir B vaut $\frac{1}{4}$, que vaut $P(A \cup B)$ si l'on sait que $P(A \cap B) = \frac{1}{10}$?

- $\frac{9}{20}$
- $\frac{7}{20}$
- $\frac{11}{20}$

2) La limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ vaut

- 0
- 1
- $+\infty$

3) Si $X \sim \text{Bin}(10, \frac{1}{3})$, alors $P(X = 7)$ vaut

- $\binom{10}{7} \frac{1}{3^7}$
- $\binom{10}{7} \frac{1}{3^7} \frac{1}{3^3}$
- $\binom{10}{7} \frac{1}{3^7} (\frac{2}{3})^3$

4) La somme $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{100} = \sum_{i=0}^{100} 3^i$

- vaut $\frac{1}{1-3}$
- vaut $\frac{3^{100}-1}{2}$
- vaut $\frac{3^{101}-1}{2}$.

5) Si $f(x, y) = \cos(xy)^2$ la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ est égale à :

- $-2 \sin(xy) \cos(xy)$
- $-2y \sin(xy) \cos(xy)$
- $-2x \sin(xy) \cos(xy)$

Exercice 3 (Probabilités – 20 points)

/20

Dans le désert du Sahara, un promeneur a un dé à quatre faces (en forme de pyramide) notées E (est), O (ouest), N (nord) et S (sud), chaque face étant équiprobable. Avant de marcher, il lance son dé, puis fait 100 mètres dans la direction indiquée.

- a) Quelle est la probabilité qu'après 1 lancer il se trouve au point de départ ? (2 points)
- b) Quelle est la probabilité qu'après 2 lancers il se trouve au point de départ ? (3 points)
- c) Quelle est la probabilité qu'après 3 lancers il soit à 300 mètres du départ ? (4 points)
- d) Quelle est la probabilité qu'après 4 lancers il se trouve au point de départ ? (5 points)
- e) Dans combien d'endroits différents peut-il se trouver après 5 lancers ? (6 points)

Solution :

- a) Il est impossible qu'il se retrouve au point de départ après 1 lancer, cette probabilité est donc 0. (2 points si réponse correcte)
- b) Il a 4 possibilités de se retrouver au point de départ (NS, SN, EO, OE) sur un total de $4 \times 4 = 16$ possibilités. La probabilité vaut donc $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$. (1 point si NS, SN, EO, OE sont écrits, 1 point si 16 apparaît dans le calcul, 1 point pour réponse finale correcte).
- c) Ici aussi il a 4 possibilités de se retrouver à 300 mètres du point du départ (NNN, SSS, EEE, OOO) sur un total de $4 \times 4 \times 4$ possibilités. La probabilité vaut donc $\frac{4}{64} = \frac{1}{16}$. (idem que ci dessus mais 2 points pour réponse correcte).
- d) Sur les $4^3 = 256$ issues possibles, la combinaison EONS (et toutes les permutations de celle-ci comme ENOS) le ramène au point de départ. Cela fait $4! = 24$ issues. À cela s'ajoutent les combinaisons du type EOEO et SNSN et leurs permutations (EEOO ou SNNS par exemple). Cela fait 6 issues avec deux E et deux O, plus 6 autres avec deux S et deux N. Au total nous avons $24 + 12 = 36$ issues qui le ramènent au point de départ. Ainsi la probabilité cherchée est $\frac{36}{256} = \frac{9}{64}$. (1 point si 256 apparaît)
- e) En s'aidant d'un petit dessin sur une feuille quadrillée, on voit que notre promeneur peut se trouver dans exactement 36 endroits différents après 5 lancers. En général, si n désigne le nombre de lancers alors le nombre d'endroits différents qu'il peut atteindre est donné par $(n + 1)^2$.

- 1) Calculez la limite suivante : $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(2\pi n)$. (2 points)
- 2) Calculez l'intégrale indéfinie suivante : $\int x^2 e^x dx$. (4 points)
- 3) Donnez l'approximation linéaire de la fonction $\sin(\frac{1}{x})$ en $a = \frac{1}{\pi}$. (4 points)
- 4) Trouvez la série de Taylor de $f(x) = e^{-2x}$ en $b = 0$. (5 points)
- 5) Trouvez le maximum de la fonction $f(x, y) = xy$ sous la contrainte $x^2 + y^2 = 1$. (5 points)

Solution :

- 1) Comme $\sin(2\pi n) = 0$ pour tout n on a que cette limite vaut 0.
(2 points pour la bonne valeur.)
- 2) On intègre par parties deux fois : $\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx = x^2 e^x - 2(xe^x - \int e^x dx)$.
Ainsi cette intégrale vaut $x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C = (x^2 - 2x + 2)e^x + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.
(2 points pour chaque intégration par parties)
- 3) L'approximation linéaire de f en a est donnée par la formule $L(x) = f'(a)(x - a) + f(a)$.
On dérive $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ et on trouve $f'(x) = -\frac{\cos(\frac{1}{x})}{x^2}$. Ainsi $f'(\frac{1}{\pi}) = \pi^2$. Comme $f(\frac{1}{\pi}) = \sin(\pi) = 0$ on a que $L(x) = \pi^2(x - \frac{1}{\pi}) = \pi(\pi x - 1)$.
(1 point pour la formule, 1 point pour la dérivée et 2 points pour l'évaluation)
- 4) On dérive $f(x) = e^{-2x}$ à n reprises et on trouve $f^{(n)}(x) = (-2)^n e^{-2x}$. Donc $f^{(n)}(0) = (-2)^n$.
Ainsi la série de Taylor est $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!} x^n$.
(1 point pour la dérivée première, 1 point pour la dérivée seconde, 2 points pour la dérivée d'ordre n et 1 point pour la formule de Taylor)
- 5) On applique la méthode de Lagrange : $F(x, y, \lambda) = xy - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$.
(1 point pour Lagrange.)
En faisant les dérivées partielles on trouve $\frac{\partial F}{\partial x} = y - 2\lambda x$ et $\frac{\partial F}{\partial y} = x - 2\lambda y$. Les points critiques de F satisfont donc les équations $y = 2\lambda x$, $x = 2\lambda y$ et $x^2 + y^2 = 1$.
(1 point pour les dérivées partielles.)
On résoud et on trouve $x = 4\lambda^2 x$ ce qui donne $\lambda = \pm \frac{1}{2}$. Ainsi $x = y$ ou $x = -y$. Comme on cherche le maximum de $f(x, y) = xy$ on prendra donc $x = y$, ce qui donne $2x^2 = 1$ (en remplaçant dans la contrainte initiale) et donc $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = y$. Finalement la valeur cherchée est $f(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{2}$.
(1 point pour la résolution du système et 1 pour reconnaître lequel des deux points critiques est un maximum et finalement 1 point pour la valeur en ce point.)